

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

Кафедра Системотехніки

Звіт
з практичної роботи №3
з дисципліни: «Технології Високопродуктивних Обчислень»
з теми: «Розв’язування систем лінійних рівнянь»

Виконав:
здобувач освіти першого
(бакалаврського) рівня освіти гр.
КНТ-22-1
Орлов О. С.
Варіант: №9

Перевірів:
Професор кафедри СТ
Міщеряков Ю. В.

3 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

3.1 Мета роботи

Реалізувати розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса з імітацією паралельних обчислень та розрахувати показники ефективності.

3.2 Хід роботи

Запишемо вихідну систему. Ми використаємо алгоритм Гауса для знаходження її рівнянь. Почнемо з прямого ходу.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 18 \\ 1 & 4 & 6 & 26 \end{array} \right) \quad (3.1)$$

Маємо $a_{11} = 1$, тож можемо не ділити перший рядок, а одразу віднімати його (помножений на 2 та 1, відповідно) від другого та третього. У результаті отримуємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 16 \\ 0 & 1 & 4 & 25 \end{array} \right) \quad (3.2)$$

Помноживши його на 1, віднімаємо другий рядок від третього. Результат:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 16 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right) \quad (3.3)$$

Для зворотнього ходу застосуємо формулу $x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \cdot x_j}{a_{ii}}$

$$x_3 = \frac{9}{3} = 3 \quad (3.4)$$

$$x_2 = \frac{16 - 3}{1} = 13 \quad (3.5)$$

$$x_1 = \frac{1 - (39 + 6)}{1} = -44 \quad (3.6)$$

Для розпаралелювання алгоритму використано схему стрічкового циклічного розділення даних. Це дозволяє рівномірно розподілити навантаження, оскільки кількість активних рядків зменшується з кожною ітерацією.

Відповідно до методичних вказівок, для ефективної реалізації операцій розсилки даних обрана топологія мережі «Гіперкуб». Це зумовлено тим, що основною комунікаційною операцією є передача ведучого рядка від одного

процесора всім іншим, що в такій топології виконується за логарифмічний час $O(\log_2 p)$.

Прямий хід складається з $n - 1$ ітерацій. Нехай k — номер поточної ітерації ($0 \leq k < n - 1$).

- а) Вибір ведучого елемента: процесор, що містить рядок k , обирає головний елемент a_{kk} ;
- б) комунікація (Broadcast): процесор-власник розсилає рядок k та елемент b_k усім іншим процесорам. Трудомісткість цієї операції оцінюється як: $(n - 1) \log_2 p \cdot (\alpha + w \cdot \frac{n}{\beta})$;
- в) Обчислення: кожен процесор модифікує свої локальні рядки i ($i > k$):

$$l_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \quad (3.7)$$

$$a_{ij} = a_{ij} - l_{ik} \cdot a_{kj} \quad (3.8)$$

$$b_i = b_i - l_{ik} \cdot b_k \quad (3.9)$$

Алгоритм розпаралелювання зворотнього ходу виконується від $i = n - 1$ до 0.

- а) Обчислення кореня: Процесор-власник рядка i знаходить x_i :

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n-1} a_{ij} \cdot x_j}{a_{ii}} \quad (3.10)$$

- б) Комунікація: Знайдене значення x_i розсилається всім процесорам. Трудомісткість: $(n - 1) \log_2 p (\alpha + \frac{w}{\beta})$.
- в) Оновлення: Процесори підставляють відоме x_i у свої рівняння для рядків $k < i$.

Оцінка ефективності базується на припущенні про використання топології «Гіперкуб», що дозволяє виконувати операції розсилки даних (Broadcast) та редукції за логарифмічний час $O(\log_2 p)$.

- а) послідовний алгоритм (T_1): трудомісткість послідовного методу Гаусса складається з суми операцій прямого ходу ($\approx \frac{2}{3}n^3$) та зворотного ходу ($\approx n^2$, враховуючи лише ділення та множення). Згідно з методичними вказівками, загальна складність становить:

$$T_1 \approx \frac{2}{3}n^3 + 2n^2 \quad (3.11)$$

- б) паралельний алгоритм (T_p): загальний час виконання складається з обчислювальної частини та комунікаційних витрат. Обчислювальна складова: При використанні циклічного розподілу рядків навантаження балансується рівномірно, тому час обчислень зменшується пропорційно кількості процесорів:

$$T_{\text{comp}} \approx \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{2}{3} n^3 \right) \cdot \tau \quad (3.12)$$

де τ — час виконання однієї базової арифметичної операції.

Комунікаційна складова (T_{comm}): Включає три основні етапи взаємодії на кожній ітерації (пошук ведучого елемента, розсилка рядка, зворотна підстановка). Для n ітерацій на топології гіперкуба сумарні витрати оцінюються формулою:

$$T_{\text{comm}} \approx (n - 1) \cdot \log_2 p \cdot \left(3\alpha + \frac{w(n + 2)}{\beta} \right) \quad (3.13)$$

де α — латентність мережі, β — пропускна здатність каналу, w — розмір елемента даних у байтах.

Сумарна трудомісткість (T_p):

$$T_p = T_{\text{comp}} + T_{\text{comm}} \approx \frac{2n^3}{3p} \tau + n \log_2 p \left(3\alpha + \frac{wn}{\beta} \right) \quad (3.14)$$

- в) показники ефективності: на основі наведених вище оцінок, теоретичне прискорення (S_p) та ефективність (E_p) розраховуються як:

$$S_p = \frac{T_1}{T_p} = \frac{\frac{2}{3} n^3 + 2n^2}{\frac{2n^3}{3p} \tau + n \log_2 p \left(3\alpha + \frac{wn}{\beta} \right)} \quad (3.15)$$

$$E_p = \frac{S_p}{p} = \frac{\frac{\frac{2}{3} n^3 + 2n^2}{\frac{2n^3}{3p} \tau + n \log_2 p \left(3\alpha + \frac{wn}{\beta} \right)}}{p} \quad (3.16)$$

При $n \gg p$ (коли розмірність задачі значно перевищує кількість процесорів), вплив комунікаційної складової зменшується, і E_p наближається до 1. Однак при фіксованому n збільшення p призводить до зростання частки T_{comm} у загальному часі, що знижує ефективність.

3.3 Висновки

Було реалізовано розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса з імітацією паралельних обчислень та розраховано показники ефективності. Для розв'язання СЛАР методом Гауса на p процесорах використано одновимірну декомпозицію даних по рядках. Оптимальною топологією було визначено гіперкуб, оскільки алгоритм потребує постійної розсилки даних («один-до-всіх») на кожній ітерації.